

Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ

Числовые ряды. Занятие 4

ТЕОРИЯ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (1)$$

Теорема 1 (признак Абеля): Если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сход; 2) $\{b_n\}$ ограничена и монотонна, то ряд (1) сходится.

Теорема 2 (признак Дирихле): Если 1) суммы $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ ограничены в совокупности; 2) $\{b_n\} \searrow 0$, то ряд (1) сходится.

2698

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$$

где сход. нет

$$a_n = (-1)^n; \quad b_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

Докажем,

что $\{b_n\} \searrow 0$. Рассм. $f(x) = \frac{x^{1/x}}{\ln x} = \frac{e^{\frac{1}{x} \ln x}}{\ln x}$, $f(x) > 0$

$f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Докажем, что $f'(x) \searrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

$$f'(x) = \frac{\ln x \cdot e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right) - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x} \ln x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\ln x}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}{(\ln x)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле ряд сходится (условно) доказано

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 4

стр. 2

ТЕОРИЯ: $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = Z = ?$ (2)

Пусть $x \neq 2\pi n \Rightarrow \sin \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow (2)$ можно умножить на $2\sin \frac{x}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2Z \sin \frac{x}{2} = 2\sin x \sin \frac{x}{2} + 2\sin 2x \sin \frac{x}{2} + \dots + 2\sin nx \sin \frac{x}{2} =$
 $= \cancel{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}} + \cancel{\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2}} + \dots + \cancel{\cos(n-1)x - \cos nx} - \cos(n+1)x =$
 $= 2\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2} \Rightarrow$

$$Z = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx =$$
$$= \frac{2\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (3)$$

Сумма $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ преобразуется аналогично. ($\circ \sin \frac{x}{2}$)

Сумма $-\sin x + \sin 2x + \sin 3x - \dots = \sin(x+\pi) + \sin 2(x+\pi) + \sin 3(x+\pi) + \dots$
— далее аналогично, $x+\pi=y$

2698,8 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\ln(\ln n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos \frac{1}{n} + \cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n} + \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n} \right)$

абс. сход нет. Докажем сход. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n \cdot \frac{\cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \cos n \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$

по отдельности:

81) Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n \cdot \frac{\cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$: $a_n = \sin n$, $A_n = \sum_{k=1}^n \sin k$ — о.г. в совокупности.

$b_n = \frac{\cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n} \rightarrow 0$. Моноotonно? $f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x}}{\ln \ln x}$,

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \ln \ln x - \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln x}}{(\ln \ln x)^2} < 0 \Rightarrow$ по признаку

Дирхле ряд сход.

82) Сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \cos n \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ доказывается аналогично

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 4

стр. 4

2698, б)

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10 \sin n} \quad (1) \text{ абс. сход. нет, } \frac{1}{n+10 \sin n} \text{ не сход. мон. к нулю}$$

$$\frac{\sin n}{n+10 \sin n} = \frac{\sin n}{n+10} + C_n, \text{ где } C_n = \frac{\sin n}{n+10 \sin n} - \frac{\sin n}{n+10} = \frac{n \sin n + 10 \sin n - n \sin n - 10 \sin^2 n}{(n+10 \sin n)(n+10)}$$

$$= \frac{10 \sin n - 10 \sin^2 n}{(n+10 \sin n)(n+10)}, \text{ получаем:}$$

$$a_n = \frac{\sin n}{n+10 \sin n} = \frac{\sin n}{n+10} + \frac{10 \sin n - 10 \sin^2 n}{(n+10 \sin n)(n+10)}$$

$\frac{1}{n^2}$ - сходится

к ряду $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10}$ признак Дирихле применить можно

$\Rightarrow$ ряд сходится

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 4

стр. 5

2668

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - \cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos 2n}{2n} \right);$$

$|a_n| \sim \frac{1}{n}$ - адс. сход. нет.

сходится $\swarrow$ сходится $\nwarrow$ сход.

2670

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} \right) + \dots$$
$$A_n = \frac{1}{(\sqrt{2n}+1)} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} = \frac{\sqrt{2n+1}-1-\sqrt{2n}-1}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} \sim \frac{-2}{n} \quad A_n''$$

ряд расходится

2673.1

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} ?$ $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \not\rightarrow 0$ ряд расходится

2673.1

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi n^2}{n+1} ?$

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos \pi \left(\frac{n^2}{n+1} - \pi n \right) = (-1)^n \cos \pi \frac{n^2 - n^2 - n}{n+1}$$
$$= (-1)^n \cos \frac{\pi n}{n+1} = (-1)^n \cos \pi \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1} = (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{\pi^2}{2! (n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} = \frac{1}{\ln^2 n} \left((-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2! (n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \Rightarrow \text{ряд сход. (условно)}$$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 4

стр 6

2682

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin \frac{\pi n}{4}}$$

1) $p > 1$ - сход. абсолютно

2) $p \leq 0$ - расходятся

3) $0 < p \leq 1$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin \frac{\pi n}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1^p + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3^p + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{0}{4^p} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{6^{p+1}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7^p - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 0$

$$b_n = \frac{1}{(8n+1)^p + 1} - \frac{1}{(8n+5)^p - 1} = \frac{(8n+5)^p - 1 - ((8n+1)^p + 1)}{((8n+1)^p + 1)((8n+5)^p - 1)} = \frac{(8n+5)^p - (8n+1)^p}{((8n+1)^p + 1)((8n+5)^p - 1)}$$

$$= \frac{(8n)^p \left(\left(1 + \frac{5}{8n}\right)^p - \left(1 + \frac{1}{8n}\right)^p \right)}{8n^p \left(1 + \frac{1}{8n+1}\right)^p \cdot 8n^p \left(1 - \frac{1}{8n+5}\right)^p} = \frac{2}{(8n)^p \left(1 + \frac{1}{8n+1}\right)^p (8n)^p \left(1 - \frac{1}{8n+5}\right)^p}$$

сход при $p > 0$

сход при $p > 1/2$

Ответ: $p \leq 1/2$ - расх
 $1/2 < p \leq 1$ условно сход
 $p > 1$ - сход. абс.

слагаемые a_n, c_n
 исследуются
аналогично

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 4

стр. 7

2689

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n)} \right)^p = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p = \left(\frac{(2n)!}{((2n)!!)^2} \right)^p = \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^p$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot \cancel{(2n)^{2n}} e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_n}{24n}}}{(\sqrt{2\pi n})^2 \cancel{2^{2n}} \cancel{n^{2n}} e^{-2n} \cdot e^{\frac{d_n}{6n}}} \right)^p = \left(\frac{2\sqrt{\pi} \sqrt{n} e^{\frac{\theta_n}{n}}}{2\pi n} \right)^p =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} n} e^{\frac{\theta_n}{n}} \right)^p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^p n^p} e^{\frac{\theta_n}{n}} = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^p} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{d_n}{n} + \frac{1}{2} \frac{d_n^2}{n^2} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow (-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{(\sqrt{\pi})^p n^{p/2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^p} \frac{d_n}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

↑
сход. усл. $p > 0$
сход. абс. $p > 2$

↑
сход. абс. $p > 0$
сход. усл. $p > -1$

↑
сход. абс.
при $p > -1$

Ответ: сход. абс. при $p > 2$
сход. усл. при $p > 0$

На дом: 2679, 2680, 2683, 2684, 2686, 2698.1 в)